Estudio de las proyecciones cartográficas con la teoría de segundo orden
Study of map projections with the second order theory

José A. Malpica Velasco[1] y Miguel J. Sevilla de Lerma[2]
[1]Departamento de Matemáticas, Universidad de Alcalá de Henares, Escuela Politécnica, E225, Campus Universitario. 28871 Alcala de Henares, Madrid josea.malpica@uah.es
[2]Instituto de Astronomía y Geodesia Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense. 28040 Madrid, sevilla@mat.ucm.es

SUMMARY
It is considered the isoparametric representation in the sense of O'keefe for the local transformation of one surface in another. Then one of the surfaces is consider being a plane, therefore only one metric tensor is necessary to represent the properties of the transformation or final projection of the surface into the plane. Using Chovitz development to the second order for the metric tensor a matrix is proposed summing up the more important properties of the cartographic projection. Then it is easy to generate a infinite number of cartographic projections provides a method for the synthesis and unification of the different projections.

1. INTRODUCCIÓN

Una variedad viene caracterizada por dos propiedades básicas: dimensión y curvatura. Sólo se consideraran superficies suaves, sin discontinuidades ni puntos donde se presenten picos, ni líneas de ruptura, de manera que la curvatura sea siempre continua. La teoría que expondremos será intrínseca, lo que significa que no va a ser necesario hacer referencias a una tercera dimensión. No va a existir distinción entre un plano, un cono o un cilindro, los tres tienen la misma dimensión y curvatura. El estudio que se realiza en esta ponencia es diferencial y no global, por tanto se van a utilizar como herramienta los métodos de geometría diferencial.

La primera forma fundamental viene dada por:

$$ds^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j \cdot \qquad (1)$$

Donde $u^i=(u^1,u^2)$ forma un sistema de coordenadas y se utiliza el criterio de sumación de Einstein. A lo largo de este artículo se tendrá la oportunidad de ver que un sistema de coordenadas facilita la forma de expresar las propiedades matemáticas de las proyecciones cartográficas

La elección de coordenadas no puede ser arbitraria, para evitar que pueda producir algún tipo de problema se exigirá que las coordenadas cumplan unas condiciones de regularidad: En general, es necesario que dado un punto P en la superficie S, y un sistema de coordenadas u^i , existan las curvas ($u^1 = c^1$ y $u^2 = c^2$) que pasan por P, de forma que las coordenadas en P son (c^1, c^2) y esta representación es única. De manera excepcional, esta condición no se exigirá en puntos singulares, como puede ser el caso de las coordenadas geográficas latitud y longitud para la esfera, los puntos singulares en este caso son los polos.

La matriz

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

se conoce como tensor métrico de la superficie.

Evidentemente, g_{ij} es una función del sistema de coordenadas u^i y de la superficie S. Si el sistema de coordenadas u^i en S cambia también lo va a hacer el tensor g_{ij}. De manera análoga, cuando se toma una superficie diferente con el mismo sistema de coordenadas implica un tensor diferente.

Como se dijo más arriba la elección del sistema de coordenadas en S no se puede realizar de manera arbitraria; existen dos restricciones fundamentales:

1.- Condición de regularidad

Regularidad significa que se trabaja con arcos de longitud real y positiva, es decir $ds^2 > 0$. En los tratados de geometría diferencial se puede ver que esto es equivalente a poner:

$$g,\ g_{11},\ g_{22} > 0, \ \text{donde}\ g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2. \qquad (3)$$

2.- Condición de curvatura

Se están considerando sólo las propiedades intrínsecas de S, de hecho, su curvatura se puede representar por una función escalar de punto k=f(punto), que es independiente del sistema de coordenadas definido sobre la superficie. k es conocida como curvatura intrínseca o curvatura gaussiana.

Sean dos superficies S y T, y dos sistemas de coordenadas u^i y v^i, para cada uno de ellos respectivamente; que con símbolos se puede expresar así:

$$\text{En S}\ ds^2 = g_{ij}\, du^i\, du^j \qquad (4)$$
$$\text{En T}\ dS^2 = G_{ij}\, dv^i\, dv^j.$$

que verifican las condiciones de regularidad y curvatura.

Ahora es posible definir una aplicación entre S y T de la forma siguiente:

$$S \Leftrightarrow T\ :\ u^i = v^i . \qquad (5)$$

Esto se conoce como el método isoparamétrico y fue aplicado por primera vez a las proyecciones cartográficas por O´keefe. La base matemática se encuentra en Levi-Civita (1923), en el capítulo VIII discute la relación entre dos elementos lineales diferentes aplicados a la misma variedad; en una nota introductoria a dicho capítulo considera un mapa y la superficie de la Tierra como una variedad con diferentes métricas, una euclidea y la otra no euclidea, de manera que para todo par de valores, ϕ (para la latitud), λ (para la longitud), se corresponden un punto en el mapa y un punto en la Tierra. Para O'Keefe las dos variedades son dos esferoides distintos. Llamó al método isoparamétrico por utilizarse el mismo parámetro sobre las dos variedades. El método isoparamétrico es sólo una forma de hacer corresponder dos superficies, y no se pierde generalidad; es más, presenta la ventaja de que toda representación de una superficie en otra queda expresada exclusivamente por el tensor métrico g_{ij}. Las condiciones de regularidad y curvatura son impuestas en g_{ij} para conseguir el tipo de representación de una superficie en otra que se desea.

A continuación se particulariza más la teoría de segundo orden, en concreto para lo que en esta ponencia interesa: las proyecciones cartográficas. Se supone que S es una superficie curva con curvatura k>0 (intuitivamente podríamos pensar en una esfera), y T es un plano, con k=0. Tomamos sobre T coordenadas v^i cartesianas $v^1 = x$ y $v^2 = y$. De esta manera en T se tiene:

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 \qquad (6)$$

Se define una proyección cartográfica u^i de la superficie curva S en el plano T como la elección de un sistema de coordenadas sobre S tal que $u^i = u^i(x,y)$, donde (x,y) es el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares para el plano T. La teoría se podría desarrollar considerando la proyección de una superficie en otra, de una manera general, de hecho Chovitz (1956) obtiene las fórmulas para la proyección de un elipsoide en otro. En este artículo nos ocuparemos sólo de las proyecciones del elipsoide o de la esfera en el plano.

Por ejemplo, si se consideran las coordenadas $u^1 = \phi$ y $u^2 = \lambda$, como las coordenadas geográficas latitud y longitud, respectivamente, una proyección cartográfica vendría dada por las expresiones:

$$\phi = \phi(x,y) \qquad (7)$$
$$\lambda = \lambda(x,y).$$

Si se elige

$$\phi = x \quad \text{de } -\pi/2 \text{ a } \pi/2,$$
$$\lambda = y \quad \text{de } -\pi \text{ a } \pi,$$

el espacio entre los paralelos es constante y la escala verdadera; nos encontramos ante la proyección Plate Carrée, la más sencilla de todas las proyecciones. Eligiendo convenientemente las coordenadas tendremos el resto de las proyecciones, es decir, se puede conseguir una gran variedad de proyecciones cambiando el sistema de coordenadas u^i en S.

¿Cómo se interpreta el tensor métrico g_{ij} en el mapa? Para captar la idea intuitiva de lo que significa el tensor métrico hay que acudir al concepto de escala local con el que está relacionado de la siguiente forma: considérense las coordenadas cartesianas sobre la superficie S y sobre el plano T, y así se tiene el mismo sistema de coordenadas en ambas superficies, formalmente sería:

$$ds^2 = g_{11}dx^2 + g_{12}dxdy + g_{22}dy^2$$
$$dS^2 = dx^2 + dy^2$$

$$m = \frac{dS}{ds} = \left(\frac{dx^2+dy^2}{g_{11}dx^2+2g_{12}dxdy+g_{22}dy^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{g_{11}+2g_{12}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+g_{22}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Sea Z la dirección de dS con respecto al eje de coordenadas X, entonces

$$Z = \tan^{-1}\frac{dy}{dx} \qquad (8)$$

$$m = \left[\frac{1+\tan^2 Z}{g_{11}+2g_{12}\tan Z + g_{22}\tan^2 Z} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad (9)$$

Los valores de Z y g_{ij} están determinados en el punto P donde se realizan los cálculos. Sin embargo, el punto P no determina de manera única el valor de *m*, porque m depende de la dirección de dS partiendo de P. La figura que resulta al considerar todos los valores de *m* es una elipse, que es la elipse de Tisssot.

Hasta ahora se han introducido dos condiciones generales intrínsecas para g_{ij}, y por tanto en la elección de u^i: regularidad y curvatura. Ahora se introducirá una tercera condición de tipo práctico, en el sentido de simplificar los cálculos, ésta va a ser la isometría en un punto o una línea dada. Isometría significa perfecta correspondencia. En general en S sucede que $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^i} \neq 0$ Pero en un punto privilegiado se puede forzar que:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^i} = 0 \qquad (10)$$

Esto significa que cada componente de g_{ij} sea una constante. El origen de coordenadas se suele tomar en el punto de isometría. Se puede mostrar también que el principio de isometría se puede aplicar para una línea. Con mayor precisión, se puede afirmar que para cualquier curva regular en S es posible encontrar un sistema de coordenadas u^i tal que sea isométrico en esa curva. Esto es un teorema de geometría diferencial conocido como el teorema de Fermi. Nos limitaremos aquí a sistemas de coordenadas con un punto o una línea recta de isometría.

2. DESARROLLO DE LA TEORÍA DE SEGUNDO ORDEN

La Teoría de Segundo Orden (TSO) ofrece un marco elegante para el estudio de las proyecciones cartográficas a costa de cierto sacrificio del detalle. Consideremos el desarrollo de g_{ij} en serie de Taylor en función de las coordenadas u^i en torno al origen (0,0):

$$g_{kh} = a_{kh}^{00} + a_{kh}^{10}u^1 + a_{kh}^{01}u^2 + a_{kh}^{20}(u^1)^2 + 2a_{kh}^{11}u^1u^2 + a_{kh}^{02}(u^2)^2 + \ldots \qquad (11)$$

$$a_{kh}^{ij} = \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial u^j} g_{kh} \right]_{(0,0)},$$

donde a_{kh}^{ij} son los coeficientes del desarrollo en serie.

Dicho desarrollo es posible gracias a la suposición que se ha hecho referente a la suavidad de la superficie S y la regularidad de las coordenadas u^i. Este desarrollo demuestra una vez más que el tensor métrico es función de las coordenadas u^i. Pero, sin embargo, los coeficientes a_{kh}^{ij} no lo son. Debido a esta independencia los coeficientes a_{kh}^{ij} resultan unos parámetros apropiados para el estudio de las propiedades de las proyecciones.

En forma matricial se puede poner:

$$(g_{kh}) = A_0 + A_1(u^i) + A_2(u^i)^2 + \ldots,$$

donde

$$A_m = (a_{kh}^{ij}) \qquad m = i + j \cdot \qquad (12)$$

El subíndice de A indica el orden de los términos que contiene dicha matriz. El desarrollo en serie muestra cómo los g_{ij} son funciones de las u^i, y sin embargo no lo son los coeficientes a_{kh}^{ij} Las matrices A_m, formadas por dichos coeficientes, van a resultar interesantes debido a su independencia. Además, puesto que dada una familia de coordenadas u^i el desarrollo de Taylor en un punto es único, las matrices A_m quedarán determinadas de manera única. La demostración de este punto está realizada en Chovitz (1952), en realidad es única salvo traslaciones y rotaciones.

El desarrollo en serie ofrece un número infinito de términos, por lo que es necesario truncar el desarrollo en alguna parte, en esta ponencia no se van a considerar los términos de orden tres y superiores, por tanto en la TSO todo el interés se centrará en A_2 al limitar el desarrollo al segundo orden. Dadas las ecuaciones de una proyección cartográfica es posible calcular los coeficientes a_{kh}^{ij}, y si se especifica una dirección inicial es posible resolver el problema inverso, es decir, establecer las coordenadas u^i dada la matriz A

A continuación se resumen las condiciones sobre los coeficientes que producen las cuatro condiciones impuestas:

Condición de Segundo Orden

$$(g_{kh}) = A_0 + A_1(u^i) + A_2(u^i)^2 \ldots \cdot \qquad (13)$$

Hay 13 coeficientes a_{kh}^{ij} a determinar.

Condición de Isometría:

$\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^i} = 0$ en (0,0) lo que significa que $a_{kh}^{ij} = 0$ para i+j = 1. (14)

Después de aplicar esta condición quedan 9 coeficientes a_{kh}^{ij}

Si se supone la restricción a coordenadas cartesianas la condición de regularidad no añadiría nada a los coeficientes:

$$a_{11}^{00}\, a_{22}^{00} - (a_{12}^{00})^2 > 0 \qquad a_{11}^{00},\ a_{22}^{00} > 0, \qquad (15)$$

pues $a_{kh}^{00} = \delta_k^h$. Siendo δ_k^h la delta de Kronecker.

Condición de Curvatura:

Si k_0 es la curvatura intrínseca en el origen, en términos de a_{kh}^{ij},

$$k_0 = 2a_{12}^{11} - a_{11}^{02} - a_{22}^{20} \cdot \qquad (16)$$

Esta última condición hace que los grados de libertad de los coeficientes a_{kh}^{ij} se reduzcan a 8.

3. PROPIEDADES CARTOGRÁFICAS

El problema directo consiste en elegir los 8 coeficientes a_{kh}^{ij} de manera que la proyección cumpla ciertas propiedades deseadas.

Simetría axial

Esta propiedad la poseen la mayor parte de las proyecciones cartográficas, es decir, poseer las mismas propiedades a ambos lados de los ejes coordenados. Esto se consigue imponiendo que:

$$a_{kh}^{ij}=0 \text{ para } i+j=2$$

luego la matriz A quedaría:

$$\begin{pmatrix} \otimes & 0 & \otimes \\ 0 & \otimes & 0 \\ \otimes & 0 & \otimes \end{pmatrix}$$

Ortogonalidad

La condición en este caso sería $a_{12}^{ij}=0$ ya que implica que $g_{12}=0$

$$\begin{pmatrix} \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & 0 & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \end{pmatrix}$$

Conformidad

Esta propiedad significa que el módulo de deformación lineal es independiente de la dirección

$$m=\left[\frac{1+\tan^2 Z}{g_{11}+2g_{12}\tan Z+g_{22}\tan^2 Z}\right]^{\frac{1}{2}},$$

para que m sea independiente de Z, es necesario que $g_{11}=g_{22}$ y que $g_{12}=0$, que en términos de a_{kh}^{ij} será:

$$a_{11}^{ij}=a_{22}^{ij}; \quad a_{12}^{ij}=0$$

Al ser $a_{12}^{ij}=0$ la conformidad implica la ortogonalidad.

$$\begin{pmatrix} \otimes & \otimes & \otimes \\ 0 & 0 & 0 \\ \otimes & \otimes & \otimes \end{pmatrix}$$

Equivalencia

Un elemento de área en la esfera viene dado por $dA_S=\sqrt{g}\,du^1du^2$ y en el plano por $dA_T=du^1du^2$ Para que se conserven las áreas debe suceder que g sea igual a la unidad. Ya que

$$g=1+(a_{11}^{20}+a_{22}^{20})(u^1)^2+2(a_{11}^{11}+a_{22}^{11})u^1u^2+(a_{11}^{02}+a_{22}^{02})(u^2)^2,$$

la condición en los coeficientes será

$$a_{11}^{ij}=-a_{22}^{ij}$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \otimes & \otimes & \otimes \\ -a & -b & -c \end{pmatrix}$$

Al contrario de lo que sucedía con la condición de conformidad, la de equivalencia no implica la ortogonalidad. Ejemplos de proyecciones equivalentes que no son ortogonales son la proyección de Bonne y la Acimutal Equivalente.

Equidistancia

Esta propiedad significa que se mantienen las distancias a lo largo de alguno de los ejes de coordenadas. Si se desea que se mantenga la distancia a lo largo de líneas paralelas al eje u^1 (u^2=C o du^2=0), $a_{11}^{ij}=0$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \end{pmatrix}.$$

De manera análoga para las líneas paralelas al eje u^2 (u^1=C o du^1=0), $a_{22}^{ij}=0$,

$$\begin{pmatrix} \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Simetría radial

Esta propiedad es más complicada de estudiar. Si se realiza la siguiente transformación:

$$u^1 = r\cos Z$$
$$u^2 = r\,\mathrm{sen}Z,$$

entonces

$$ds^2=(1+Ar^2)dr^2+2Br^2dr\,dZ+(1+Cr^2)r^2dZ^2,$$

donde A, B y C son expresiones que contienen a_{kh}^{ij} y Z.

La propiedad de simetría radial implica que ds^2, y por tanto A, B y C, deben ser independientes de Z. No se debe confundir con la conformidad que dice que m es independiente de Z.

Esto se consigue eligiendo los coeficientes a_{kh}^{ij} de la forma siguiente:

$$a_{11}^{20}=a_{22}^{02}; \quad a_{22}^{20}=a_{11}^{02}; \quad a_{11}^{02}+2a_{12}^{11}=a_{11}^{20}$$
$$a_{22}^{11}=a_{12}^{20}; \quad a_{11}^{11}=a_{12}^{02}; \quad a_{11}^{11}+a_{22}^{11}=0.$$

La demostración se encuentra en Chovitz (1952). La simetría radial no implica necesariamente la simetría axial. Sin embargo, si se supone la simetría axial la segunda línea de las condiciones no es necesaria ya que daría 0.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ -b & \frac{1}{2}(a-c) & b \\ c & -b & a \end{pmatrix}.$$

4. CONSTRUCCIÓN DE PROYECCIONES

Una proyección concreta se obtiene especificando completamente los coeficientes a_{kh}^{ij}. Estos se eligen en función de las condiciones que se han presentado hasta ahora: curvatura, isometría, segundo orden, además de las propiedades que se desea que satisfaga el mapa: ortogonalidad, equidistancia, etc.

La condición de curvatura viene dada por (Chovitz, 1979)

$$k_0=2a_{12}^{11}-a_{11}^{02}-a_{22}^{20}.$$

La dimensiones de a_{kh}^{ij} vienen dadas por k_0. Para simplificar es posible normalizar dividiendo todo por k_0, y considerar la ecuación como:

$$1=2a_{12}^{11}-a_{11}^{02}-a_{22}^{20}.$$

Se elegirá siempre el punto (0,0) como origen del desarrollo de la serie de Taylor. Este puede en principio estar situado en cualquier punto que no sea singular. Por ejemplo, no sería posible elegir el Polo como origen en una proyección de Mercator. Por otra parte en ocasiones el origen vendrá dado por la propia proyección que se quiera representar, por ejemplo en la Plate Carrée tendrá que ser un punto del ecuador. También es necesario elegir una dirección inicial para el eje u^1. Aquí se tomará según el Norte.

En adelante se van a considerar solo las proyecciones con simetría radial. Un ejemplo de proyección que no tiene simetría axila es cualquiera de las proyecciones oblicuas. La TSO puede tratar perfectamente todo tipo de proyección, esta particularización se hace aquí con el único propósito de simplificar. Con esta restricción de los nueve a_{kh}^{ij}, cuatro se convierten en cero, y sólo es necesario elegir cinco a_{kh}^{ij}. Que teniendo en cuenta la condición de curvatura sólo habrá que elegir cuatro.

1) Si se desea conservar la longitud a lo largo de ambos conjuntos de coordenadas hay que imponer en los coeficientes lo siguientes:

$$a_{11}^{20}=a_{11}^{02}=a_{22}^{20}=a_{22}^{02}=0.$$

Por la condición de curvatura $a_{12}^{11} = 1/2$, y la proyección queda especificada completamente. Se trata de la proyección de Bonne. En el caso particular en que el origen se encuentra en el ecuador se trata de la proyección Sanson-Flamsteed. Obsérvese que es equivalente pero no ortogonal.

2) Se busca una proyección ortogonal ($a_{12}^{11} = 0$) y que conserve la distancia a lo largo de las líneas u^2 ($a_{22}^{20} = a_{22}^{02} = 0$). Por la condición de curvatura $a_{11}^{02} = -1$. Si se toma de manera arbitraria $a_{11}^{20} = 0$ se tiene la proyección Policónica Americana y Cassini-Soldner, que son idénticas hasta el segundo orden.

3) Si se mantiene la ortogonalidad pero se exige que se conserve la distancia a lo largo de las líneas u^1 en lugar de las u^2 como en el párrafo anterior se obtiene la proyección Cónica Simple o Cónica Equidistante, y si se elige el origen en el ecuador nos encontramos ante la proyección Plate Carrée. g_{22} es una función solo de u^1.

4) Considerando ahora la clase de las proyecciones conformes $a_{11}^{20} = 0$, que junto a la condición de curvatura hacen que los coeficientes tomen los valores siguientes: $a_{11}^{02} = a_{22}^{02} = -1$, $a_{22}^{20} = a_{22}^{11} = 0$. La proyección ahora definida por estos coeficientes es la Transversa Mercator.

5) La única forma de que una proyección fuera conforme y equivalente a la vez es que los coeficientes valieran todos $a_{kh}^{ij} = 0$, pero eso es imposible por la condición de curvatura.

6) Sustituyendo la propiedad de conformidad en la proyección Lambert por la de equivalencia se tienen los coeficientes siguientes:

$$a_{11}^{20} = -a_{22}^{20}, \qquad a_{11}^{02} = -a_{22}^{02}, \qquad a_{12}^{11} = 0$$

$$a_{11}^{20} = 0, \qquad a_{11}^{02} = -1,$$

el tensor métrico es sólo función de u^1, y u^2 resulta automecoico. Esta es la proyección de Albers.

7) Imponiendo la propiedad de simetría radial, ya que sólo se están considerando las que tiene simetría axial. Si además se impone que sea conforme se tiene que aplicando la condición de curvatura

$$a_{11}^{20} = a_{11}^{02} = a_{22}^{20} = a_{22}^{02} = -1/2$$

Resulta la proyección Estereográfica, que es la única que tiene simetría radial y es conforme.

8) Imponiendo, de manera similar a como se hizo en el apartado anterior, la propiedad de equivalencia se obtiene la proyección Acimutal Equivalente. Esta proyección no es ortogonal.

9) Una proyección que tiene simetría radial, tal que g_{11} es función sólo de u^2 y g_{22} es una función sólo de u^1 se obtiene haciendo $a_{11}^{20} = 0$. Esta es la proyección Acimutal Equidistante.

La TSO permite estudiar de manera rápida las propiedades de las proyecciones, pero no sólo eso, también permite establecer fórmulas generales en términos de los coeficientes.

5. ESTUDIO DE LAS DEFORMACIONES

Deformación lineal

Sustituyendo la expresión para el tensor métrico (11) en la fórmula que da el módulo de deformación lineal (9) y realizando operaciones se tiene:

$$m = 1 - \frac{1}{2}\left(a_{11}^{20}\cos^2 Z + a_{22}^{20} sen^2 Z\right)\left(u^1\right)^2 - 2a_{12}^{11} senZ\cos Z u^1 u^2$$
$$-\frac{1}{2}\left(a_{11}^{02}\cos^2 Z + a_{22}^{02} sen^2 Z\right)\left(u^2\right)^2$$

En Chovitz (1954), se encuentra el cálculo de los semiejes de la indicatriz de Tissot, que vienen dados por:

$$m_{extremos} = 1 - \frac{1}{4}\left(a_{11}^{20} + a_{22}^{20}\right)\left(u^1\right)^2 - \frac{1}{4}\left(a_{11}^{02} + a_{22}^{02}\right)\left(u^2\right)^2 \pm R$$

donde

$$R = \sqrt{\left[\frac{1}{4}\left(a_{11}^{20} - a_{22}^{20}\right)\left(u^1\right)^2 + \frac{1}{4}\left(a_{11}^{02} - a_{22}^{02}\right)\left(u^2\right)^2\right]^2 + \left(a_{12}^{11}u^1u^2\right)^2}.$$

Aunque el radical parece muy complicado, para las proyecciones más conocidas resulta un cuadrado perfecto y m resulta para estos casos un polinomio de segundo orden. En el caso de ortogonalidad la expresión para m también resulta simple. Si la proyección es conforme entonces R=0 como se puede comprobar fácilmente.

Deformación angular.

Se define el ángulo Z como el ángulo que se forman en el plano T en el punto $P(u^1,u^2)$ la tangente a dS y las líneas u^2=cte. y z se define de manera análoga pero en la esfera S. En Chovitz (1954) se encuentra el desarrollo para el cálculo de la fórmula que da la deformación en los ángulos:

$$z - Z = \operatorname{sen} z \cos z\left[\frac{1}{2}\left(a_{22}^{20} + a_{11}^{20}\right)\left(u^1\right)^2 - \frac{1}{2}\left(a_{22}^{02} + a_{11}^{02}\right)\left(u^2\right)^2 - 2a_{12}^{11}u^1u^2 \operatorname{tg} z\right].$$

Se ve inmediatamente que en las proyecciones conforme $z\text{-}Z=0$. Los valores extremos son:

$$(z\text{-}Z)_{min} = 0$$

$$(z\text{-}Z)_{max} = -a_{12}^{11}u^1u^2 \pm R,$$

donde R es el mismo radical del apartado anterior

Estas fórmulas permiten un cálculo muy sencillo de las deformaciones dada la tabla de coeficientes para las proyecciones de interés. Obsérvese que la deformación angular para las proyecciones con simetría radial difiere sólo en una constante. Siendo cero para la proyección estereográfica.

Se ha realizado un programa en C++ que permite estudiar de manera muy intuitiva las deformaciones gracias a esta teoría que simplifica notablemente los cálculos. La simplificación que introduce el segundo orden no es de importancia cuando lo que se construye es un método de visualización. Como conclusión podríamos decir que la matriz A permite construir un método de visualización para el tensor métrico y a partir de él de las propiedades de las proyecciones cartográficas que están asociadas a las deformaciones lineales y angulares. En la figura 1 pueden verse las deformaciones para una proyección con matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & 0 \\ -5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

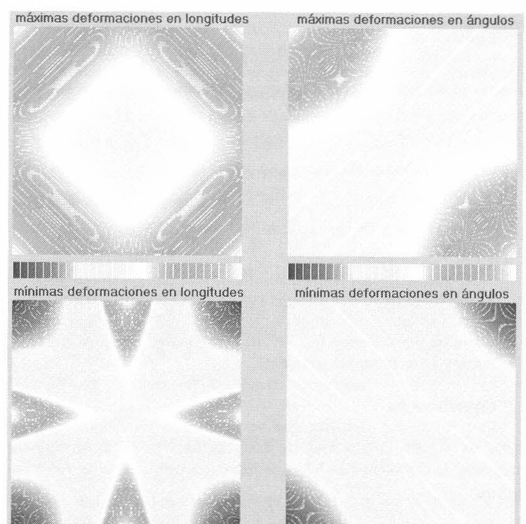

Figura 1 **– Deformaciones de una proyección ejemplo con una escala normalizada, verde representa cero deformación.** ***(Deformations in an arbitrary example projection with a normalize scale, green colour represents zero deformation.)***